Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo. Versión 1

Gabriel Marzinotto

November 11, 2013

Un sistema, abordado desde la perspectiva más simple posible, es una caja negra que produce una salida ante un determinado estímulo o entrada. Si consideramos las señales de entrada $x(t)$ y las salidas del sistema $y(t)$ como funciones, entonces un sistema no es más que un operador que toma una funciones de un conjunto y las convierte en otras distintas.

$$y(t) = P[x(t)]$$

Entre las propiedades ideales que puede tener un sistema, hay 2 que son fundamentales: "*Linealidad*" e "*Invarianza en el Tiempo*".

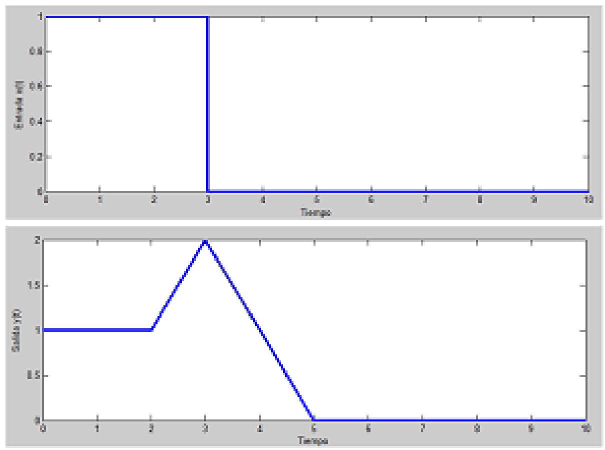
La Linealidad, en términos de la teoría de sistemas, quiere decir que si tenemos 2 señales de entrada y queremos observar la salida del sistema cuando aplicamos su suma (o su resta), podemos aplicar el principio de superposición y sumar (o restar) las salidas que el sistema genera a cada entrada por separado y obtendremos el mismo resultado. Es decir:

$$P[u(t) + v(t)] = P[u(t)] + P[v(t)]$$

Ejemplos de sistemas lineales abundan: un circuito derivador o integrador de señales tiene un comportamiento perfectamente lineal si se evitan los límites en los que este se satura.

En lo que respecta a invarianza en el tiempo, es un concepto aún más natural que el anterior. Un sistema se considera "*Invariante en el tiempo*"si al aplicarle 2 señales de entrada iguales salvo por un desfasaje temporal, se optienen como resultados las mismas salidas salvo por el mismo desfasaje temporal. Matemáticamente se dice que un sistema es Invariante en el tiempo si:

1



$_1.png$

$$y(t) = P[x(t)] \Rightarrow y(t-\alpha) = P[x(t-\alpha)]$$

Sistemas con esta característica están a nuestro alrededor, al encender una computadora por ejemplo, se presiona un botón que es la entrada del sistema y se optiene como salida una imágen de la pantalla encendiéndose. Si repetimos este experimento en distintos momentos del día, aplicando la misma señal de entrada desfasada, obtendremos siempre la misma respuesta (la computadora encendiéndose) desfasada de manera idéntica.

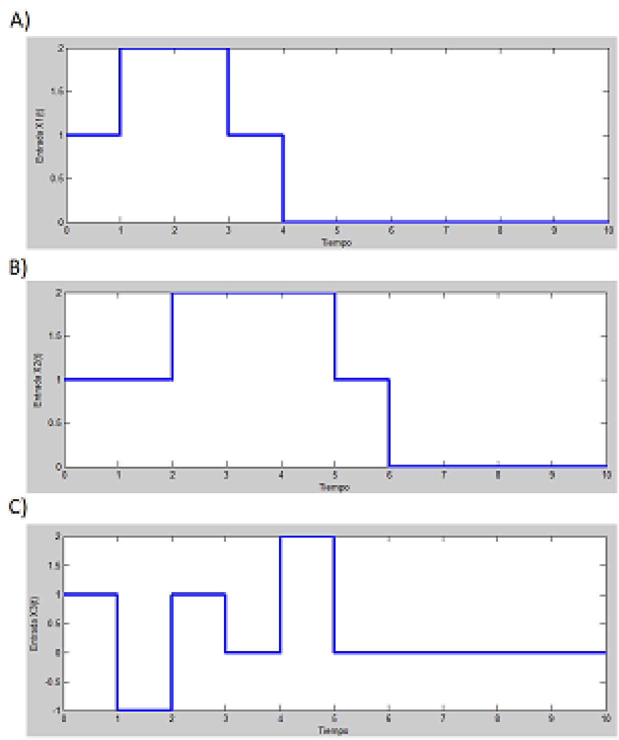
Ejemplo1:

Si se tiene un sistema lineal e invariante en el tiempo y se sabe que la entrada $x(t) = u(t) - u(t-3)$ produce una salida $y(t) = u(t) + r(t-2) - 2r(t-3) + r(t-5)$ tal y como se muestra en la Figura1. Calcule la salida del sistema para cada una de las entradas $x1(t)$, $x2(t)$ y $x3(t)$ de la Figura 2.

Primero buscamos la salida $y1(t)$ cuando la entrada es $x1(t)$, para esto buscamos escribir la nueva entrada $x1(t)$ en función de la entrada $x(t)$ que ya conocemos. Esto es $x1(t) = x(t) + x(t-1)$. Dicho esto, podemos aprovechar la propiedad de Linealidad y escribir:

$$\begin{aligned} y1(t) &= P[x1(t)] = P[x(t) + x(t-1)] \\ &= P[x(t)] + P[x(t-1)] \end{aligned}$$

2



$_{2}.png$

Pero $P[x(t)]$ es conocido, y gracias a que el sistema es invariante en el tiempo, $P[x(t-1)]$ también lo es, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} y1(t) &= P[x1(t)] = y(t) + y(t-1) \\ y1(t) &= y(t) + y(t-1) \end{aligned}$$

y escribiendo $y(t)$ en función de rampas y escalones, nuestro resultado final es:

$$y(t) = u(t) + u(t-1) + r(t-2) - r(t-3) - 2r(t-4) + r(t-5) + r(t-6)$$

Para la salida $y2(t)$ repetimos el mismo procedimiento, describiendo $x2(t) = x(t) + x(t-1) + x(t-2)$ y aplicando las propiedades de linealidad tenemos:

$$\begin{aligned} y2(t) &= P[x2(t)] = P[x(t) + x(t-1) + x(t-2)] \\ &= P[x(t)] + P[x(t-1)] + P[x(t-2)] \end{aligned}$$

Aplicando ahora la invarianza en el tiempo

$$\begin{aligned} y2(t) &= P[x2(t)] = y(t) + y(t-1) + y(t-2) \\ y2(t) &= y(t) + y(t-1) + y(t-2) \end{aligned}$$

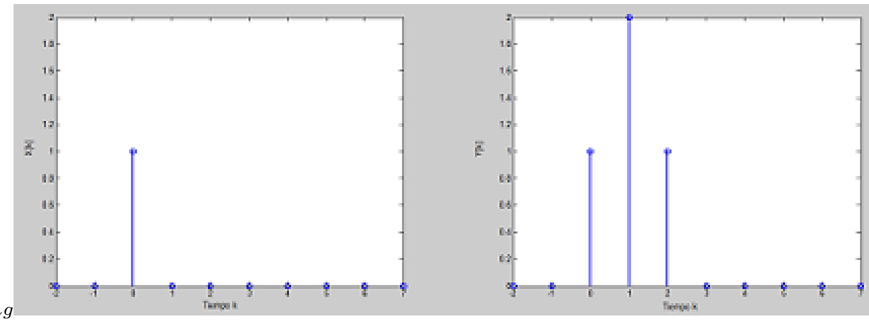
Y describiento la salida en función de escalones y rampas tenemos:

$$y2(t) = u(t)+u(t-1)+u(t-2)+r(t-2)-r(t-3)-r(t-4)-r(t-5)+r(t-6)+r(t-7)$$

Finalmente para $y3(t)$, tenemos que $x3(t) = x(t) - 2x(t) + x(t-2)$ aplicando linealidad:

$$\begin{aligned} y3(t) &= P[x3(t)] = P[x(t) - 2x(t-1) + 2x(t-2)] \\ y3(t) &= P[x(t)] - 2P[x(t-1)] + 2P[x(t-2)] \end{aligned}$$

3



$_3.png$

Por invarianza en el tiempo

$$
\begin{aligned}
y3(t) &= P[x3(t)] = y(t) - 2y(t-1) + 2y(t-2) \\
y3(t) &= y(t) - 2y(t-1) + 2y(t-2)
\end{aligned}
$$

y describiento todo en terminos de escalones y rampas tenemos:

$$y3(t) = u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) + r(t-2) - 4r(t-3) + 6r(t-4) - 3r(t-5) - 2r(t-6) + 2r(t-7)$$

Ejemplo 2:

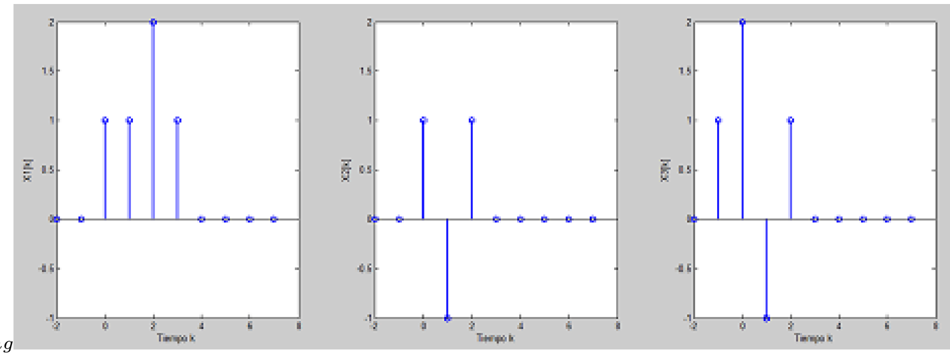
Si consideramos ahora un sistema lineal e invariante en el tiempo, pero de tiempo discreto, los mismos resultados pueden extrapolarse. Supongamos que tenemos un sistema que tiene respuesta $y[k]$ ante la entrada $x[k]$.

Tal y como se muestra en la figura y ahora se pide calcular la respuesta a las señales $x1[k]$, $x2[k]$, $x3[k]$.

El procedimiento es el mismo, para $x1[k]$, $x2[k]$, $x3[k]$, escribimos la función como una suma de señales cuya respuesta conocemos. En este caso:

$$
\begin{aligned}
x1[k] &= x[k] + x[k-1] + 2x[k-2] + x[k-3] \\
x2[k] &= x[k] - x[k-1] + x[k] \\
x3[k] &= x[k+1] + 2x[k] - x[k-1] + x[k-2]
\end{aligned}
$$

4



$_4.png$

En este caso podemos aplicar el operador lineal del sistema y obtener:

$$\begin{aligned} y1[k] &= P[x1[k]] = y[k] + y[k-1] + 2y[k-2] + y[k-3] \\ y2[k] &= P[x2[k]] = y[k] - y[k-1] + y[k-2] \\ y3[k] &= P[x3[k]] = y[k+1] + 2y[k] - y[k-1] + y[k-2] \end{aligned}$$

Y ahora podemos escribir como n-uplas, cada una de las señales, de manera que la suma se facilite. En las siguientes ecuaciones marcamos el valor de las señales en instante $k = 0$ con un guión:

$$\begin{aligned} y1[k] &= (\bar{1}, 2, 1, 0, 0, 0) + (\bar{0}, 1, 2, 1, 0, 0) + (\bar{0}, 0, 2, 4, 2, 0) + (\bar{0}, 0, 0, 1, 2, 1) \\ y2[k] &= (\bar{1}, 2, 1, 0, 0) - (\bar{0}, 1, 2, 1, 0) + (\bar{0}, 0, 1, 2, 1) \\ y3[k] &= (1, \bar{2}, 1, 0, 0, 0) + (0, \bar{2}, 4, 2, 0, 0) - (0, \bar{0}, 1, 2, 1, 0) + (0, \bar{0}, 0, 1, 2, 1) \end{aligned}$$

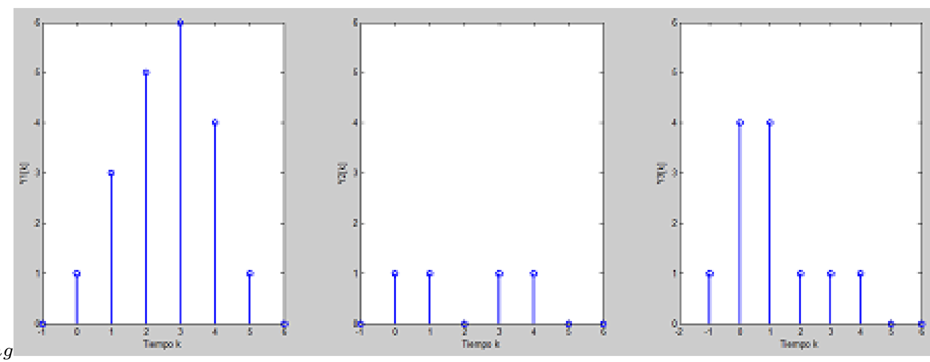
Finalmente.

$$\begin{aligned} y1[k] &= (\bar{1}, 3, 5, 6, 4, 1) \\ y2[k] &= (\bar{1}, 1, 0, 1, 1) \\ y3[k] &= (1, \bar{4}, 4, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Y graficando lo obtenido se obtiene:

En conclusión cuando trabajamos con sistemas lineales e invariantes en el tiempo podemos predecir su respuesta para cada estímulo, si conocemos la respuesta que este tiene ante un estímulo específico.

5



$_5.png$